

Bei linearen Abbildungen fallen alle Stetigkeitsbegriffe zusammen, genauer:

Satz 16.15 : Seien X, Y normierte Räume,

$f: X \rightarrow Y$ sei linear. Dann sind

gleichwertig:

(i) f stetig auf X

(ii) f stetig in 0

(iii) f Lipschitz

Beweis: (i) $\implies$ (ii) $\checkmark$

(iii) $\implies$ (i) $\checkmark$

Zu zeigen also nur: (ii) $\implies$ (iii)

Wähle $\varepsilon = 1 \implies \exists \delta > 0$ mit

$$\|f(x) - f(0)\| \leq 1 \quad \forall x \text{ mit } \|x\| = \|x - 0\| \leq \delta$$

(die Stetigkeit in 0 wird nicht einmal richtig ausgenutzt!) $\implies$

$$(*) \quad \|f(x)\| \leq 1 \quad \forall \|x\| \leq \delta$$

Sei $z \neq 0$. Dann ist $x := \delta \frac{z}{\|z\|}$

betragsmäßig $\leq \delta \implies$ Linearität und $(*)$

$$\|f(z)\| \leq \delta^{-1} \|z\|.$$

Nun ersetze z durch $u-v$ und benutze erneut die Linearität. $\square$

Bspl u. Bem.

(1)

$$\dim X = \infty$$

$\implies \exists$ unstetige lineare Abb. auf X

Konkret: $X := C^1([0,1]),$

$Y := C^0([0,1])$

jeweils mit $\|\cdot\|_\infty$ als Norm; betrachte die lineare Abbildung

$A: X \rightarrow Y, \quad A(f) := f'$

Für $f_n(x) := x^n$ gilt:

$\|f_n\|_\infty = 1, \quad \|A(f_n)\|_\infty = n$

$\Rightarrow A$ nicht Lipschitz.

Überlege: $\dim X < \infty \Rightarrow$ jede lineare

Abb. auf X ist stetig! ∇

$(X = \mathbb{R}^n, \quad A(\sum_{i=1}^n x_i e_i) = \sum_{i=1}^n x_i A(e_i))$

Notation : Sei $A: X \rightarrow Y$ stetig

und linear. Dann heißt

$$\|A\| := \sup_{x \in X, \|x\| \leq 1} \|f(x)\| (< \infty!)$$

die Operator Norm von A . Offenbar gilt:

$$\|A\| = \text{Lip}(A).$$

② Sei $X := C^0([a, b])$ mit $\|\cdot\|_\infty$

und $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz. Man

setzt $A: X \rightarrow X$, $A(f)(x) := \int_a^x \gamma(f(t)) dt$

Dann ist A Lipschitz mit

$$\|A\| \leq \text{Lip}(\gamma).$$



Lipschitz Stetigkeit ist Spezialfall von

Def 16.13 : (gleichmäßige Stetigkeit)

Seien $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$ metrische Räume. $f: X_1 \rightarrow X_2$ heißt gleichmäßig stetig (vgl. d_1 und d_2 !),

falls:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ mit

$$d_1(u, v) < \delta \implies d_2(f(u), f(v)) < \varepsilon$$

für alle $u, v \in X_1$.

Bem: f Lipschitz $\implies f$ glm. stetig

Wie im "eindimensionalen Fall" (vgl. Satz 9.15) beweist man ("Blatt 9/A4")

Satz 16.16 : Seien X, Y metrische Räume.

Ist $f: X \rightarrow Y$ stetig und X Kompakt,
so ist f gleichmäßig stetig.

Beweis: falls nicht, so $\exists \varepsilon > 0$ und

Folgen $x_n, y_n \in X$ mit

$$\begin{cases} d(x_n, y_n) \leq 1/n, \\ d(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon. \end{cases}$$

Für Teilfolgen gilt: $x_n' \rightarrow a, y_n' \rightarrow a$
mit $a \in X$ (Folgenkompaktheit).

Benutze die Stetigkeit von f in a
und erhalte einen Wspr. $\square$

Satz 9.8 gilt wörtlich in metrischen Räumen, d.h.: (stetige Bilder kompakter Mengen sind kompakt)

Satz 16.17 Sei $f: X \rightarrow Y$ stetige Abbildung zwischen metrischen Räumen. Dann ist $f(K)$ kompakt in Y für jede kompakte Menge $K \subset X$.

Beweis 1: mit Folgen, vgl. 9.8

Beweis 2: Sei $K \subset X$ kompakt und $(V_\alpha)_{\alpha \in I}$ offene Überdeckung von $f(K)$ in Y . $\implies$

$$f^{-1}(V_\alpha) \text{ offen und } \bigcup_{\alpha \in I} f^{-1}(V_\alpha) \supset K;$$

K kompakt $\implies \exists \alpha_1, \dots, \alpha_m$ mit

$$K \subset \bigcup_{i=1}^m f^{-1}(V_{\alpha_i}) \implies$$

$$f(K) \subset f\left(\bigcup_{i=1}^m f^{-1}(V_{\alpha_i})\right) \subset \bigcup_{i=1}^m V_{\alpha_i} \quad \square$$

Korollar „Satz vom Maximum u. Min.“

Sei X kompakter metrischer Raum und

$f: X \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig. Dann gibt es

$x_1, x_2 \in X$ mit

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \quad \forall x \in X.$$

(„Max. und Min. werden angenommen,
sup und inf von f werden realisiert“).

vgl. Beweis des Korollars zu Satz 9.8, der nur
Kompaktheit von $f(K)$ in $\mathbb{R}$ benutzt!

Erinnerung: $\left\{ \begin{array}{l} \text{Sei } K \text{ kompakt in einem} \\ \text{metrischen Raum und } f \\ \text{stetig} \end{array} \right\} \Rightarrow$

$f(K)$ kompakt $\Rightarrow f(K)$ beschränkt

$\Rightarrow \inf f(K), \sup f(K)$ existieren
in $\mathbb{R}$

Def. von z.B. $\sup f(K) \Rightarrow$

$\exists$ Folge $y_n \in f(K)$ mit $y_n \rightarrow \sup f(K)$;

Kompaktheit von $f(K)$ ergibt Abgeschlossen-
heit der Menge $\Rightarrow \sup f(K) \in f(K)$,

d.h. $\exists x_2 \in K$ mit $f(x_2) = \sup f(K)$.

□

Anwendung :

Satz : Sei X ein metrischer Raum,

$A \subset X$ sei abgeschlossen und $K \subset X$

Kompakt. Im Fall $A \cap K = \emptyset$

ist $0 < \text{dist}(A, K) := \inf \{ d(a, k) : a \in A, k \in K \}$.

Bem: ① Man nennt $\text{dist}(M, N)$

den Abstand zweier Teilmengen von X .

" dist " ist keine Metrik auf $\mathcal{P}(X)$: Aus

" $\text{dist}(M, N) = 0$ folgt nicht $M = N$!

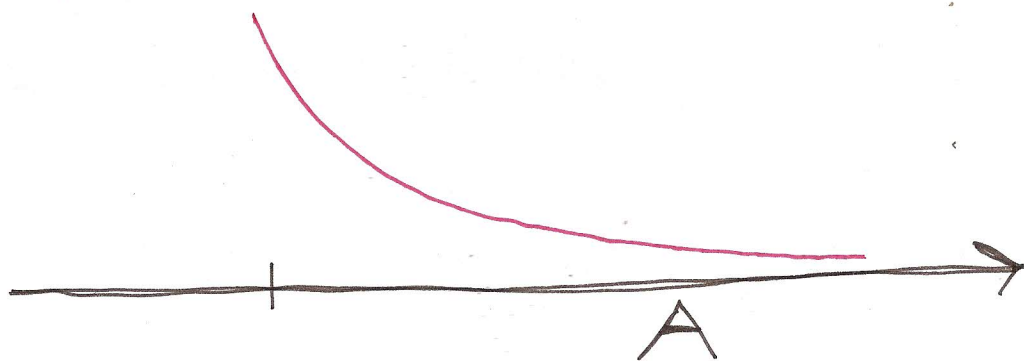
② Seien A, B nur abgeschlossen mit

$A \cap B = \emptyset$. Dann folgt i. a.

nicht $\text{dist}(A, B) > 0$!

Bspl: $X = \mathbb{R}^2$, $A = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$,

$B = \{(x, 1/x) : x > 0\}$



Beweis des Satzes: Betrachte

$$\varphi: X \ni x \mapsto \text{dist}(x, A).$$

Wir wissen: φ Lipschitz $\xRightarrow{\text{Satz vom Min}}$

$$\exists x_0 \in K: \varphi(x_0) = \inf_K \varphi = \text{dist}(A, K)$$

Wegen $A \cap K = \emptyset$ und somit $x_0 \notin A$

gibt es wegen der Abgeschlossenheit von A

ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x_0) \cap A = \emptyset$,

so dass $\text{dist}(x_0, A) \geq \varepsilon$, also

$$\varphi(x_0) \geq \varepsilon > 0.$$



Zum Schluss: Stetigkeit von φ

Im Reellen und Komplexen kennen wir den nächsten Satz (vgl. Satz 9.9), die kleinen Beweisänderungen sollen als Übung ausgeführt werden.

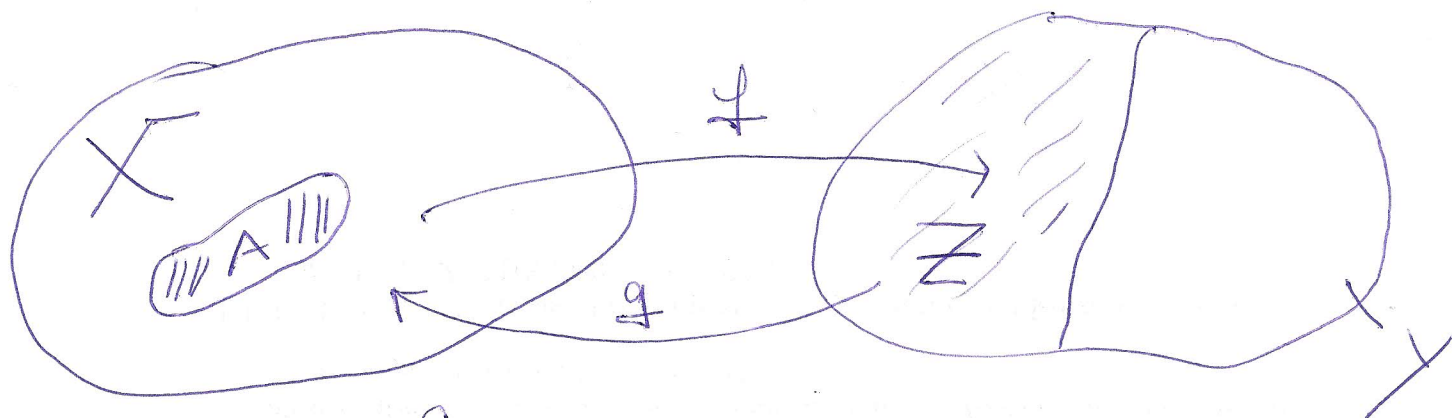
Satz 16.18 (Stetigkeit von f^{-1})

Seien X, Y metrische Räume,

$f: X \rightarrow Y$ sei stetig und injektiv.

Ist X **Kompakt**, so ist f^{-1} eine stetige Abbildung zwischen den metrischen Räumen $f(X)$ und X .

Hinweise: Setze $Z := f(X)$ (Kompakt)



$$\begin{cases} Z := f(X) \subset Y, \\ g := f^{-1}: Z \rightarrow X \end{cases}$$

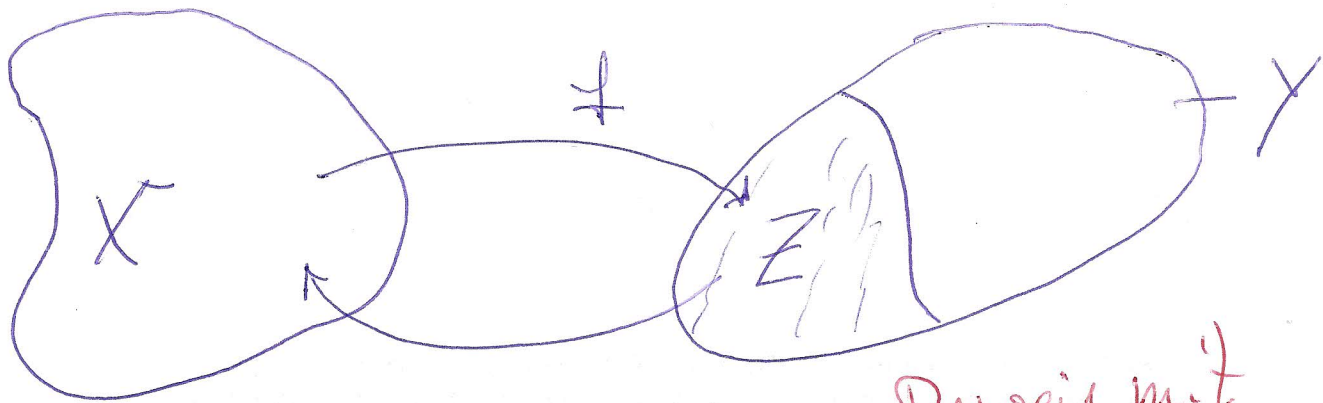
Für $A \subset X$ ist:

$$g^{-1}(A) (= \text{Urbild unter } g) = f(A)$$

Ist A nun abgeschlossen, so ist A
kompakt (da X kompakt) $\xRightarrow{f \text{ stetig}}$
 $f(A)$ kompakt, also speziell abgeschlossen

$\Rightarrow g^{-1}(A)$ abgeschlossen

Also: g stetig



$$g := f^{-1}: Z \rightarrow X$$

Beweis mit
Folgen

gelte $z_k \rightarrow z$, $z_k, z \in Z$

Zu zeigen: $g(z_k) \rightarrow g(z)$

beachte: $z_k = f(x_k)$, $z = f(x)$ (*)

für gewisse $x_k, x \in X$

X kompakt $\implies \exists$ Teilfolge $\tilde{x}_k$ sowie $\tilde{x} \in X$
mit $\tilde{x}_k \rightarrow \tilde{x}$;

f stetig $\implies \underbrace{f(\tilde{x}_k)}_{= \tilde{z}_k} \rightarrow f(\tilde{x})$

$\tilde{z}_k \rightarrow z$ und (*) ergeben: $f(x) = f(\tilde{x})$

$\implies x = \tilde{x}$, also $\tilde{x}_k \rightarrow x$

f injektiv
Das muss aber für jede Teilfolge

gelten $\implies$ Beh!

$$g := \bar{\varphi}^{-1}: Z \longrightarrow X.$$

nun begründe:

$$\left\{ \begin{array}{l} A \subset X \text{ abgeschlossen} \implies \\ \bar{g}^{-1}(A) \quad \text{---||---} \quad \text{in } Z \end{array} \right\}$$

Mit Satz 16.13 folgt die Stetigkeit von g .



Def 16.14 : Seien X, Y metrische Räume

und $\varphi: X \rightarrow Y$ stetig und bijektiv.

Ist dann $\varphi^{-1}: Y \rightarrow X$ stetig, so

heißt φ ein

Homöomorphismus zwischen X und Y .

Bsple:

① X kompakt, $\varphi: X \rightarrow Y$ injektiv
und stetig $\implies$

X und $\varphi(X)$ sind homöomorph

(Umformulierung von Satz 16.18)

[Bem: Homöomorphismen erhalten topologische Strukturen, Homomorphismen übertragen algebraische Eigenschaften]

② $X := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ 1-Kugel,

$Y := \mathbb{R}^n$

$\varphi: X \rightarrow Y$, $\varphi(x) := \frac{1}{1-|x|} x$, ist
ein Homöomorphismus, $\varphi^{-1}(z) = \frac{1}{1+|z|} z$

Termin 15